Molnár Gyöngyvér
SZTE, Pedagógia Tanszék, MTA-SZTE
Képességkutató Csoport

A Rasch-modell kiterjesztése nem dichotóm adatok elemzésére: a rangskálás és a parciális kredit modell

A tesztelméletek újabb, a nemzetközi mérésekben is egyre gyakrabban alkalmazott generációját adják az objektív mérést is lehetővé tevő valószínűségi tesztelméletek. Az objektív mérés megvalósításának lehetőségével, módszereivel régóta foglalkoznak a társadalomtudósok, mivel az lehetőséget biztosítana olyan egyetemes, mindenki által elfogadott skálák megalkotására, mint a természettudományokban például a hőmérsékleti skálák vagy éppen az idő beosztása (Molnár, 2005).

Hazánkban jelentős múlttal rendelkeznek a klasszikus tesztelméleti módszerekkel történő elemzések, azonban ezek nem alkalmasak az objektív mérés, az objektív skálák megalkotására, továbbá módszereik segítségével bizonyos kérdéseket nem tudunk megválaszolni. (Az objektív mérés megvalósításának lehetőségéről lásd: *Molnár*, 2005, 2006, a valószínűségi és a klasszikus tesztelmélet összevetéséhez: *Molnár és Józsa*, 2006, konkrét elemzésekhez: *Molnár*, 2003, 2004.)

A valószínűségi tesztelmélet egyik, talán legfontosabb és legismertebb modellje, a Rasch-modell csak dichotóm adatok elemzésére alkalmas, ezért a kutatók továbbfejlesztették a modellt, hogy más, nem dichotóm adatokból álló adatbázisok elemzését is lehetővé tegyék. A Rasch-modell főbb tulajdonságait, matematikai hátterét egy korábbi tanulmányban foglaltuk össze (*Molnár*, 2006). E tanulmány célja olyan valószínűségi modellek és valószínűségi függvényeken nyugvó elemzések bemutatása, amelyek alapját rangskálán lévő adatok képezik.

A tanulmány elején a konzisztencia végett röviden bemutatjuk a Rasch-modell matematikai formalizálását, majd áttekintjük a parciális kredit modell és a rangskálás modell tulajdonságait. Bemutatjuk e modellek matematikai hátterét, levezetését a Rasch-modellből, továbbá a karakterisztikus görbék, nehézségi indexek értelmezési módját, tulajdonságait az egyes modellekben. Kitérünk e modellek megkülönböztető tulajdonságaira is.

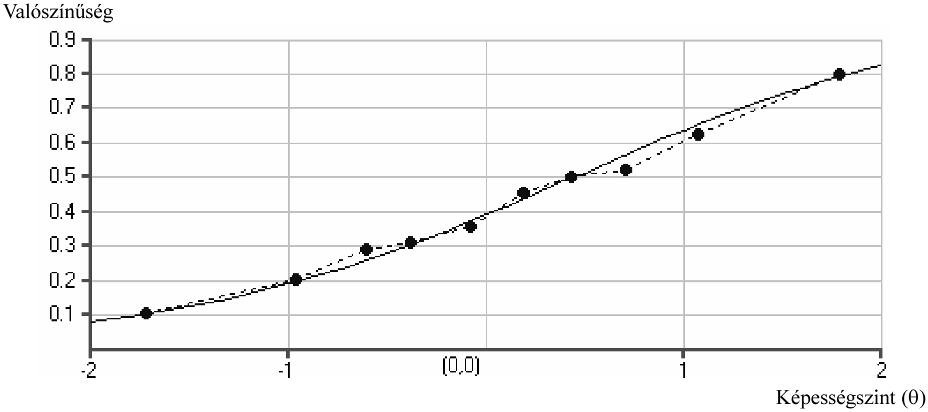
A parciális kredit modell – felépítése, levezetése következtében, mint korábban utaltunk rá – egy speciális esete a Rasch-modell. Ennek következtében azok a szoftverek, amelyek kezelni tudják a parciális kredit modellt, Rasch-modellel történő elemzéseket is el tudnak végezni, sőt egy modellben variálni is tudják a dichotóm és nem dichotóm itemek elemzését. A tanulmányban bemutatott elemzések, ábrák a ConQuest (*Wu, Adams és Wilson*, 1998) szoftverrel készültek.

A Rasch-modell

Egy itemre adott legegyszerűbb válaszmintázat az, amikor két válaszlehetőség közül választunk: igen-nem, jó-rossz, minden-semmi. Az ily módon kódolt itemekre tekinthetünk akár mint „egy-lépcsős" itemekre, ahol, ha valaki megtette azt az egy lépcsőt, akkor 1 pontot kap, ha nem, akkor 0-t. Rasch az 1950-es években (1960) ezen típusú adatok elemzésére dolgozott ki egy modellt, amit azóta gyakran Rasch-modellnek neveznek. A modell elterjedt az egész világon, számos nemzetközi mérésben, illetve itembankok felépítése során alkalmazzák (*Write és Masters*, 1982).

A Rasch-modell dichotomitásánál fogva a részben jó válaszok elemzésére nem ad lehetőséget. A pedagógiai kutatásokban legtöbbször mégis elegendő, mivel azok skálái leggyakrabban dichotóm skálák. (A Rasch-modell közelítő eljárásairól és az item illeszkedésről lásd: *Write és Stone*, 1979; *Griffin*, 1999.) A további modellek könnyebb megértése és a Rasch-modellel való kapcsolatuk bemutatása miatt felvázoljuk a Rasch-modell egyenletét (levezetését és tulajdonságait lásd: *Molnár*, 2006; *Horváth*, 1997).

A tanulmányban bemutatott karakterisztikus és valószínűségi görbék, valamint különböző elemzések mind egy-egy szimulált adatbázis egy-egy itemének tulajdonságát jellemzik. A szimulált adatbázisokban közös, hogy a diákok száma minden esetben (n) 2000, az itemek száma pedig 10. Különbözőség csak az itemek lehetséges pontozásában, illetve a modellek felépítésében van. Jelen esetben az itemek kódolásánál szóba jöhető pontszám a 0 és 1 volt. Az *1. ábra* egy fenti feltételeknek megfelelő adatbázis 5. itemére adott helyes válasz valószínűségét mutatja a képességszint és az item nehézsége függvényében. Ebből adódóan jelen esetben az i=5.



1. ábra. Dichotóm item esetén a jó válasz valószínűségi görbéje a képességszint függvényében

A helyes válasz valószínűségét az (1) egyenlet írja le:

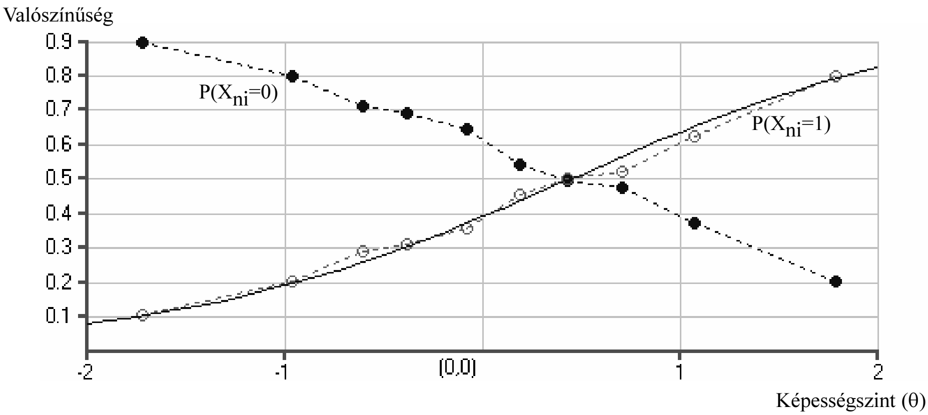
$$P(X_{ni}=1)=\frac{\exp(\theta_n-\delta_{i1})}{1+\exp(\theta_n-\delta_{i1})} \qquad (1)$$

ahol $P(X_{ni}=1)$ az n-edik személy i-edik itemre adott helyes válaszának valószínűsége, θ_n a személy képességparamétere, δ_{i1} az i-edik item jó válaszának (első lépésének) nehézségi paramétere. Hasonlóképpen írható le a helytelen válasz valószínűségét meghatározó egyenlet, majd a két egyenletet egy közös modellben felírva a (2) egyenletet kapjuk, ami a Rasch-modell matematikai formalizálása.

$$P(X_{ni}=x)=\frac{\exp\sum_{j=0}^{x}(\theta_n-\delta_{ij})}{\sum_{h=0}^{m_i}\exp\sum_{j=0}^{h}(\theta_n-\delta_{ij})} \qquad (2)$$

ahol x=0 vagy 1 és $P(X_{ni}=x)$ az n-edik személy i-edik itemre adott helyes vagy helytelen (x értékétől függően) válaszának valószínűsége.

A modellben az item nehézségi indexének meghatározásához a fent említett szimulált adatbázis – már az *1. ábrán* is elemzett – 5. itemének helyes, illetve helytelen megoldásának valószínűségi görbéit mutatjuk be a képességszint függvényében (*2. ábra*). Definíció szerint a két görbe metszéspontja (δ_{i1}) adja az item nehézségi indexét (jelen esetben δ=0,44), ami azt a pontot jelenti, ahol a helyes és helytelen válasz valószínűsége 50–50 százalék (vö az *1.* és *2. ábrát*.), azaz $P(X_{ni}=0)+P(X_{ni}=1)=1$.



2. ábra. Dichotóm item esetén a jó és rossz válasz valószínűségi görbéi a képességszint függvényében

A 2. ábráról leolvasható, hogy a képességszint növekedésével egyre csökken annak valószínűsége, hogy a személy 0 pontot ér el az itemen, illetve egyre nő annak valószínűsége, hogy 1 pontot ér el. A δ_{i1} képességszintig, ami definíció szerint az item nehézségi indexét is meghatározza, a helytelen válasz valószínűségét adó görbe felette van a helyes válasz valószínűségét jellemző görbének, majd fordítva, δ_{i1}képességszint felett nagyobb annak a valószínűsége, hogy a személy jó választ ad az itemre.

A tanulmány további részében ismertetett modellekben felhasználjuk a Rasch-modell nehézségi indexre, képességszintekre, válaszmintázatokra, illetve a válaszok lépcsőzetes kezelésére vonatkozó meghatározásait.

A parciális kredit modell

Ahogy korábban utaltunk rá, a társadalomtudományi kutatások során nem mindig elegendő, ha adataink dichotóm skálán helyezkednek el, gyakran szükség van a több fokozatú értékelésre is. A megalkotás sorrendjét szem előtt tartva, Likert-skálán lévő adatok elemzésére alkalmas Andricht (1978) rangskálás modellje. A modell hátránya, hogy csak azon adatbázisok esetén alkalmazható, ahol minden egyes itemnek megegyezik a skálaszerkezete (*Bond és Fox*, 2001). Ez elég nagy hátrányt és korlátot jelentett az elemzésekben, ezért továbbfejlesztették a modellt. A parciális kredit modell (*Masters*, 1982) használata már nem követeli meg az azonos skálaszerkezetet. Alkalmazható például olyan adatok elemzése során, ahol az értékelés egy skálán (például 05-ös skálán) történik, vagy olyan itemeknél, ahol a válaszok egy része jobb, mint a többi (például tévképzet-kutatásokban), vagy olyan többlépcsős itemek esetében (például problémamegoldásnál), ahol a diáknak több, egymástól lehetőleg független lépést kell megoldania a feladat megoldása során (például egy matematikafeladat esetén, ahol ki kell számolni, hogy mennyi $\sqrt{8}/0{,}2$–4). Matematikailag a modellek közötti eltérés azok parametrizációjában van. A könnyebb megértés kedvéért először a parciális kredit modell levezetését, majd abból a rangskálás modell levezetését mutatjuk be annak ellenére, hogy előbb a rangskálás modellt alkották meg, amelyet csak később követett a parciális kredit modell.

A parciális kredit modell levezetése a Rasch-modellből

A parciális kredit modell egyedül abban különbözik a Rasch-modelltől, hogy nem kettő, hanem több válaszlehetőséggel rendelkező itemek elemzésére is alkalmas. Ebből adódóan az első nem az egyedüli lépés, azaz $P(X_{ni}=0)+P(X_{ni}=1)<1$. Ahhoz, hogy valaki eljusson a második lépésig, meg kell tennie az első lépést. Ebből a gondolatból, azaz az egymás melletti kategóriákba tartozás valószínűségének meghatározásából indult ki Masters (1982) a modell felállítása során, majd az egyes kategóriákba tartozás valószínűségét leíró egyenleteket közös modellben foglalta össze (*Write és Masters*, 1982).

Konkrét példán szemléltetve, maradva a $\sqrt{8/0{,}2-4}$ = ? feladatnál, a lépésre bontás a következőket jelenti:

Ha nem tette meg az első lépést:	0 pont
8/0,2=40 (első lépés)	1 pont
40-4=36 (második lépés)	2 pont
√36 = 6 (harmadik lépés)	3 pont

A feladat megoldásának lépésekre bontásából adódik, hogy a második lépést nem lehet anélkül elvégezni, hogy az első lépést ne végezte volna jól el a személy, illetve a harmadik lépést sem lehet jól elvégezni az első és a második lépés helyes elvégzése nélkül. Továbbá az is leolvasható, hogy nem minden esetben igaz, hogy a későbbi lépés nehezebb, mint az azt megelőző (erre a kérdéskörre és az ebből adódó problémákra a későbbiekben még visszatérünk).

A parciális kredit modell matematikai levezetésében vegyünk egy olyan parciális kredit itemet, ahol csak két lépést (0, 1, 2 pontot lehet elérni) kell megtenni a teljes megoldásig. Elsőként megnézzük annak valószínűségét, hogy 0 vagy 1 pontot ér el a diák ezen a virtuális 3 kategóriás itemen (lásd az [1] és [2] egyenletet). Az (1) és (2) egyenlet a Rasch-modell formáját követi.

$$p_{0/0,1} = P(x=0/X=0 \text{ vagy } X=1) = \frac{P(X=0)}{P(X=0)+P(X=1)} = \frac{1}{1+\exp(\theta-\delta_1)} \qquad (1)$$

$$p_{1/0,1} = P(x=1/X=0 \text{ vagy } X=1) = \frac{P(X=1)}{P(X=0)+P(X=1)} = \frac{\exp(\theta-\delta_1)}{1+\exp(\theta-\delta_1)} \qquad (2)$$

ahol θ a személy képességparamétere a vizsgált látens változó képességskáláján, δ_1 az item megoldása első lépésének nehézségi paramétere ugyanazon skálán.

Hasonlóan annak valószínűsége, hogy a diák 1 vagy 2 pontot ér el az itemen, a következőképpen írható le (a [3] és [4] egyenlet is a Rasch-modell formáját követi):

$$p_{1/1,2} = P(x=1/X=1 \text{ vagy } X=2) = \frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)} = \frac{1}{1+\exp(\theta-\delta_2)} \qquad (3)$$

$$p_{2/1,2} = P(x=2/X=1 \text{ vagy } X=2) = \frac{P(X=2)}{P(X=1)+P(X=2)} = \frac{\exp(\theta-\delta_2)}{1+\exp(\theta-\delta_2)} \qquad (4)$$

ahol θ a személy képességparamétere a vizsgált látens változó képességskáláján, δ_2 az item megoldása során az első lépés után a második lépés megtételének nehézségi paramétere ugyanazon skálán.

A δ_2 paraméter azonban nem mond semmit arról, hogy a személy milyen valószínűség mellett ér el 1 pontot, milyen valószínűség mellett teszi meg jól először a megoldáshoz vezető út első lépését, holott ha nem teszi meg az első lépést, nem teheti meg a másodikat sem. Ebből adódóan δ_2 paraméter függ az első lépés megtételének nehézségétől, vagyis nem független nehézségi paraméter, mintha a két lépés egy-egy független item lenne.

Ha nem párba állítva modellezzük az egyes kategóriaértékek valószínűségét, hanem a három értékkategóriát együtt kezelve, akkor a következő egyenletrendszerrel írható le a modell:

$$p_0 = P(x=0) = \frac{1}{1+\exp(\theta-\delta_1)+\exp(2\theta-(\delta_1+\delta_2))} \qquad (5)$$

$$p_1 = P(x=1) = \frac{\exp(\theta-\delta_1)}{1+\exp(\theta-\delta_1)+\exp(2\theta-(\delta_1+\delta_2))} \qquad (6)$$

$$p_2 = P(x=2) = \frac{\exp(2\theta-(\delta_1+\delta_2))}{1+\exp(\theta-\delta_1)+\exp(2\theta-(\delta_1+\delta_2))} \qquad (7)$$

Általánosítva, ha i item egy nem dichotóm, 0, 1, 2, … $m_i$válaszkategóriájú item, akkor annak valószínűsége, hogy n személy az i itemen x pontot ér el, megadja a parciális kredit modell általános egyenletét (lásd a [8] egyenletet):

$$P(X_{ni}=x) = \frac{\exp\sum_{j=0}^{x}(\theta_n-\delta_{ij})}{\sum_{h=0}^{m_i}\exp\sum_{j=0}^{h}(\theta_n-\delta_{ij})} \qquad x=0,1,\dots,m_i \qquad (8)$$

ahol $\delta_{i0}\equiv 0$ úgy, hogy $\sum_{j=0}^{0}(\theta_n-\delta_{ij})=0$ és $\exp\sum_{j=0}^{0}(\theta_n-\delta_{ij})=1$ (*Write és Stone*, 1982).

A (8) egyenletben a számláló csak a megtett x lépés nehézségi indexét tartalmazza, míg a nevező az összes lehetséges (m_i+1) számlálót magába foglalja.

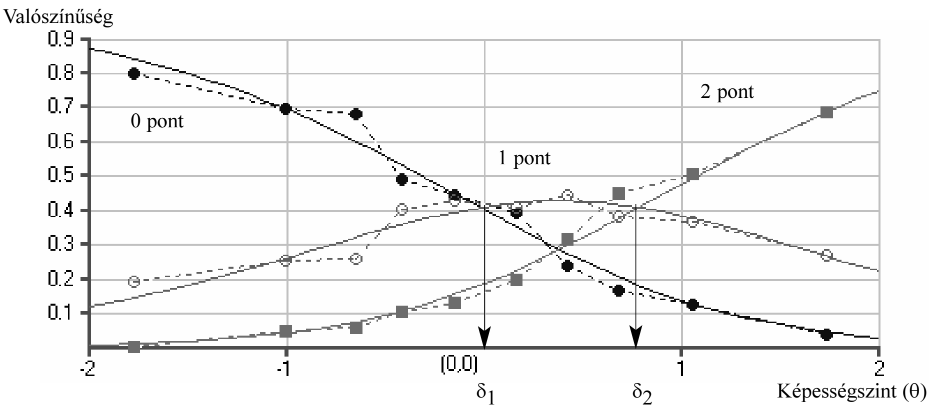
Egy egy lépcsős item esetén (m=1) elegendő 1 karakterisztikus görbe annak leírásához, hogy a személy milyen képességszint mellett ér el nagyobb valószínűség mellett 1, mint 0 pontot (lásd 1. ábra). Egy két lépcsős (m=2) item esetén már két karakterisztikus görbére van szükség ennek jellemzésére. Az első logisztikus görbe arról ad információt, hogy mi a valószínűsége annak, hogy a személy inkább 1, mint 0 pontot ér el az itemen, a második görbe pedig azt jellemzi, hogy milyen valószínűség mellett ér el a személy inkább 2, mint 1 pontot az itemen. Ezek a karakterisztikus görbék a képességskála különböző részén elhelyezkedő azonos meredekségű egyszerű logisztikus görbék (*Write és Masters*, 1982).

A modell alkalmazásának nem feltétele, hogy a második lépés minden esetben nehezebb legyen, mint az első lépés, viszont a második lépést csak az első valamilyen megtétele után lehet megtenni. Ha a második lépés könnyebb, mint az első, akkor a két görbe fordítva helyezkedik el a képességskálán. A következőkben ezt a problémakört járjuk körül a modell értékkategóriáinak jellemzésében.

A parciális kredit modell értékkategóriáinak tulajdonsága

Az itemre adott válaszok pontozását a feladatlapok, tesztek kódolása során úgy kell kialakítani, hogy a pontszám növekedése párhuzamos legyen a vizsgált látens képesség fejlettségi szintjével, azaz minél magasabb az adott pontszám, annál magasabb kompetenciaszintet tükrözzön: a magasabb képességszintű diákok magasabb értékkategóriába, az alacsonyabbak alacsonyabb értékkategóriába tartozzanak. A két legalacsonyabb kategória a 0 és az 1. A magasabb képességszintűek nagyobb valószínűséggel tartozzanak az 1-es, mint a 0-s kategóriába. Hasonlóképpen az 1 és 2 kategória esetén a magasabb képességszintű diák nagyobb valószínűséggel kapjon 2, mint 1 pontot. Ebből következőleg, ha az összes értékkategóriára általánosítunk, a magasabb képességszintű diák nagyobb valószínűséggel kapjon több pontot; más oldalról megközelítve: több pont elérését várjuk el tőle, mint az alacsonyabb képességszintű diáktól.

A parciális kredit modell itemkarakterisztikus görbéi azt mutatják meg, hogy a különböző képességszintek mellett mi a valószínűsége annak, hogy a diák az adott értékkategóriát kapja a feladat megoldása során. A *3. ábra* egy szimulált adatbázis (n=2000, itemek száma=10, válaszkategóriák száma=3 [0, 1, 2]) 6. itemének itemkarakterisztikus görbéit mutatja. Az ábráról leolvasható, hogy a képességszint növekedésével növekedik annak valószínűsége is, hogy a diák magasabb kategóriában van, magasabb pontszámot ér el. A görbék közül legfelül először a 0 kategóriába tartozás valószínűségét mutató görbe van, majd az 1 kategóriába tartozás valószínűségét mutató, végül a képességszint további növekedésével a 2 kategóriába tartozás valószínűségét mutató görbe húzódik.



3. ábra. Egy három válaszkategóriás item itemkarakterisztikus görbéi

A δ_k grafikus interpretációját ugyancsak a *3. ábra* mutatja. Az ábrán azok a képességszint-értékek a δ_k értékei, ahol az egyes karakterisztikus görbék metszik egymást. Ez azt jelenti, hogy δ_k az a pont, ahol annak valószínűsége, hogy a diák a k-1 vagy a k kategóriában van, azonos. Ez a valószínűség kevesebb, mint 0,5, mivel annak valószínűsége, hogy a diák a k-1 és k kategóriákon kívüli kategóriában van, feltételezésünk szerint nem 0. Ez a matematikai tény adja a δ_k jelentését. (Matematikai szemszögből a δ értékek az [1–4] egyenletekből levezethetőek.)

A két δ paraméter három részre osztja a képességskálát:

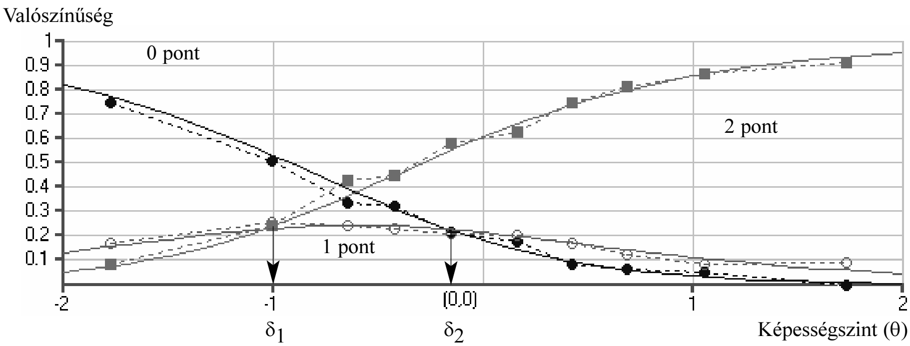
(1): $]-\infty,\ \delta_1[$, amilyen képességszintű diákok legnagyobb valószínűséggel a 0 kategóriában vannak, és alacsonyabb valószínűséggel teljesítenek az 1 vagy 2 kategóriában;

(2): $]\delta_1, \ \delta_2[$ képességszint-intervallumba eső diákok, akik legnagyobb valószínűséggel 1 pontot érnek el a feladaton, és kisebb a valószínűsége annak, hogy 0 vagy 2 pontot kapnak, valamint a

(3): $]\delta_2, \infty[$ képességszinttel rendelkező diákok, akik legnagyobb valószínűséggel 2 pontot érnek el a feladaton, és nem 0 vagy 1-et.

Ha δ_1 és δ_2 egymástól távol van a képességskálán, akkor számos képességszintű diák nagy valószínűség mellett ér el 1 pontot az itemen; ha közel vannak egymáshoz, akkor csökken ezen diákok köre: a képességszint függvényében jobban meghatározhatóvá válik az a diákcsoport, amelynek tagjai 1 pontot érnek el az itemen.

Előfordulnak azonban olyan itemek, ahol felcserélődnek a δ_k értékek, azaz nem rendezetten követik egymást a képességskálán. Ez akkor következik be, amikor – három kategória esetén – a középső görbe (jelen esetben az 1-es kategóriába tartozás valószínűségét mutató karakterisztikus görbe [lásd *4. ábra*]) nagyon lapos, azaz nagyon kevés az olyan tanuló, aki ebbe a kategóriába sorolható. Ebben az esetben nehézkes az itemkarakterisztikus görbe interpretációja, mivel egyik képességszintre sem igaz, hogy legnagyobb valószínűséggel ebbe – jelen esetben az 1-es – a kategóriába tartoznak a diákok. A δ_1 képességszint, ahol azonos valószínűséggel van a diák a 0 és 1 kategóriában, magas érték, a δ_2 képességszint pedig, amilyen képességszintű diák azonos valószínűséggel kap 1 vagy 2 pontot, alacsonyabb érték, azaz $\delta_1 > \delta_2$. Mivel a δ értéke függ attól, hogy az egyes kategóriákban hány tanuló van, ebből fakadóan, mint korábban is utaltunk rá, a δ_k paraméter nem lehet egy független lépés nehézségének mutatója, hanem inkább az összes lépés nehézségétől függő mutató.



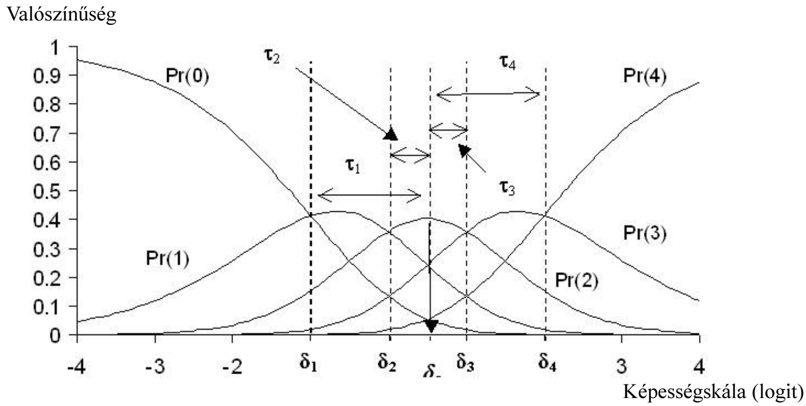
4. ábra. Egy három válaszkategóriás „rosszul viselkedő” item itemkarakterisztikus görbéi

A δ_k paraméter-értékek felcserélődése gyakrabban megfigyelhető azon típusú feladatok esetén, ahol a problémát különböző lépésekben kell megoldani. A megoldáshoz vezető úton előfordulhat, hogy egy későbbi lépés könnyebb, mint egy azt megelőző. Például egy matematikai természetű probléma esetén az első lépés a formulává alakítás, a második a számítás elvégzése. Ebben az esetben a tanulók leggyakrabban a 0 vagy a 2 kategóriába tartoznak, mivel akik már helyesen lefordították a problémát a matematika nyelvezetére, vagyis formalizálták azt, ritkán követnek el számolási hibát. Másrészről, ha holisztikusan alkalmazzuk a parciális kredit modellt, és például fogalmazások pontozása elemzésében használjuk, ritkán találkozunk ezzel a problémával.

A parciális kredit modell parametrizációjának lehetőségei

A képességskála δ_1, δ_2, …, δ_k paraméterértékei, mint korábban definiáltuk, az item egyes kategóriái karakterisztikus görbéinek metszéspontját jellemzik, azaz azokat a képességszinteket, ahol azonos annak valószínűsége, hogy a személy a k, vagy a k+1-dik kategóriába sorolható. Ezzel szemben, ha valaki egyetlen paraméterértékkel, egy átlagos nehézségi indexszel szeretné jellemezni a parciális kredit item nehézségét, és elemzésében nincs szükség az egyes lépések nehézségi indexének leírásához, akkor a δ_k paraméterértékek helyett használhatja azok átlagát ($\delta.$) és a δ_k paraméterértékek $\delta.$ átlagtól való távolságát jellemző τ_k paraméterértékeket. A τ_k paraméterértékek önmagukban való interpretációja nehézkes, értelmezésük csak a $\delta.$ paraméter összefüggésében lehetséges. A τ_k paraméter egy lépésparaméter, ami megmutatja, hogy az egyes τ értékek milyen messze vannak az item átlagos nehézségi indexétől ($\delta.$). Mivel értékük függ a karakterisztikus görbék elhelyezkedésétől, ezért ebben az esetben is találkozhatunk ugyanazzal a felcserélődés problémájával, ahogy a δ_k paraméterek esetében. Mind a $\delta.$ paraméter, mind a τ_k paraméterértékek itemről-itemre változhatnak.

Az új paraméterek más módon osztják intervallumokra a képességskála terjedelmét. Az *5. ábrán* grafikusan ábrázoljuk az új (δ_i és τ_k) és a korábbi (δ_k) paraméterek tulajdonságait, azok különbözőségét.



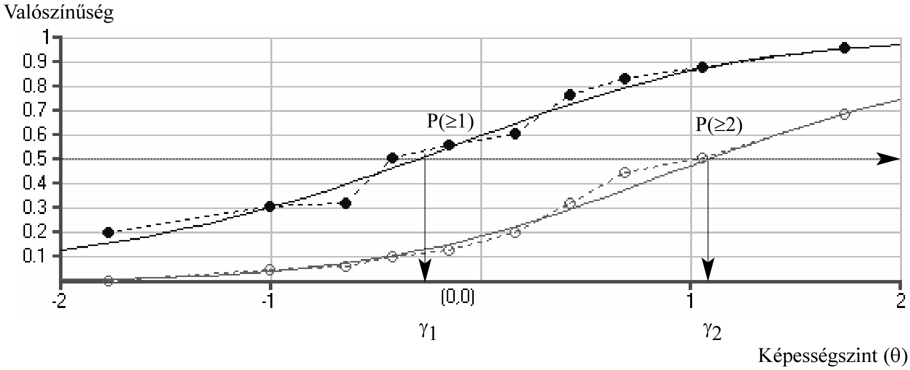
5. ábra. Egy öt kategóriájú item karakterisztikus görbéi a két parametrizáció (δ_k és τ_k) esetén (Wu, 2006a alapján)

A thurstoni küszöb

A parciális kredit modellel kapcsolatban eddig tárgyalt paraméterértékek nem adnak információt arra vonatkozólag, milyen képességszint szükséges egy item adott kategóriájába való bekerüléshez. Parciális kredit itemek esetén például a két pont eléréséhez minden esetben magasabb képességszint szükséges, mint az 1 pont eléréséhez. E kumulatív teljesítmény leírására alkalmas mutató a thurstoni küszöb, amely definíció szerint azt mutatja meg, hogy milyen képességszint szükséges ahhoz, hogy valaki 50 százalék valószínűséggel elérjen egy adott pontszámot. Ebből adódóan a thurstoni küszöb az item nehézségi indexének értelmezésében játszik szerepet (*Wu*, 2006a).

Dichotóm item esetén az item nehézségi indexe definíció szerint az a képességszint, ahol a helyes megoldás valószínűsége 0,5. Ez a képességszint két részre – a 0 és 1 pontos részre – bontja a képességskálát. Ezt a definíciót általánosítjuk parciális kredit item esetére. A γ_1 az a képességszint, ahol az 1 pont elérésének nehézségi indexe van, a γ_2 az a képességszint, ahol a 2 pont elérésének nehézségi indexe van stb.

A *6. ábra* egy 3 kategóriájú parciális kredit item esetén mutatja az adott kategóriába tartozás valószínűségi görbéjét a képességszint függvényében, grafikusan ábrázolva a thurstoni küszöb jelentését. A thurstoni küszöb értelmezhető úgy is, mint a képességskála olyan intervallumokra való felosztása, ahol értelmezhetővé válnak az itemen elért pontszámok. A 6. ábra esetén ez azt jelenti, hogy a γ_1=-0,31, a γ_2=1,08, azaz az 1 pont elérése közel átlagos képességszintet igényel, míg 2 pont eléréséhez már átlag feletti képességszint szükséges.



6. ábra. A thurstoni küszöb és a kumulatív valószínűségi görbék

Az egyes feladatok thurstoni küszöbét és a diákok képességszint szerinti eloszlását közös képességskálán tudja ábrázolni a már említett ConQuest szoftver. Erre és az ábra interpretációjára adunk a következőkben egy példát: a *7. ábrá*n egy, a korábbi ábrákon is elemzett szimulált 2000 fős, 10 parciális kredit itemes adatbázis virtuális diákjainak és itemeinek személy-item térképeit ábrázoljuk, az adatokat dichotóm adatként és nem dichotóm adatként, a thurstoni küszöböt minden egyes item vonatkozásában megjelenítve.

Az ábra bal oldali felének személy-item térképén nem jelennek még meg az item egyes lépéseinek nehézségi küszöbei, hanem egy Rasch-modellel történt elemzés eredményét mutatja, ahol az itemeket átlagos nehézségi paraméterük szerint rajzolta fel a program, míg az ábra jobb oldali személy-item térképén megjelenítette itemek szerinti bontásban a thurstoni küszöbértékeket is. Az x.y megjelenítés az x-edik item y-odik lépésének küszöbét jelenti, azt a küszöböt, ahol a tanuló 50 százalék valószínűséggel éri el legalább a jelzett itemen belüli szintet. Mindkét személy-item térkép bal oldali része a diákok képességszint szerinti eloszlását mutatja, ami jelen esetben az egyező adatbázisok miatt azonos.

A tanulmány további részében ismertetjük a rangskálás modell alapgondolatát. Bár a modell, mint korábban utaltunk rá, a parciális kredit modell megalkotása előtt megvolt, de levezetése könnyebben érthető, ha azt a parciális kredit modell egyszerűsítésével, a modell korlátainak figyelembe vételével tesszük.

A rangskálás modell

A rangskálás modellt mindazon itemek elemzésére tudjuk alkalmazni, amelyekre adott válaszok rangsorolt válaszalternatívák, például egy attitűd-teszt esetében, amikor négy alternatíva közül kell választanunk: nagyon nem szeretem, nem szeretem, szeretem, nagyon szeretem. Ez a négy alternatíva három lépcsőfok megtételét hordozza magában. Az első lépés, amikor dönteni kell, a nagyon nem szeretem és a nem szeretem között van, a második, amikor választani kell a nem szeretem és a szeretem között stb. Miután a modell alkalmazásának feltétele, mint korábban utaltunk rá, hogy a feladatlap összes itemére adott válasz azonos számú lépésből álljon, a válasz meghozatalakor megtett lépések nehézsége közel azonos minden item esetén, ami a későbbiekben fontos szerepet játszik. Jelen esetben az attitűd-teszt minden egyes kérdésére adott válasz adásakor maximum 3 azonos nehézségű „lépést” kell megtenni.

```
    személy        +item
================================
   3            |
                |
                |
                |
                |
                |
               X|
              XX|
   2           X|
              XX|
              XX|7
             XXX|
            XXXX|
             XXX|
             XXX|
   1      XXXXXX|1 5 9
           XXXXX|
           XXXXX|
        XXXXXXXX|
        XXXXXXXX|
        XXXXXXXX|3 6
       XXXXXXXXX|
        XXXXXXXX|
   0      XXXXXX|
        XXXXXXXX|
         XXXXXXX|
       XXXXXXXXX|
      XXXXXXXXXX|4
         XXXXXXX|
          XXXXXX|
  -1        XXXX|
            XXXX|
            XXXX|10
              XX|
              XX|8
              XX|
              XX|
               X|
  -2           X|2
               X|
               X|
                |
                |
                |
                |
  -3            |
================================
```

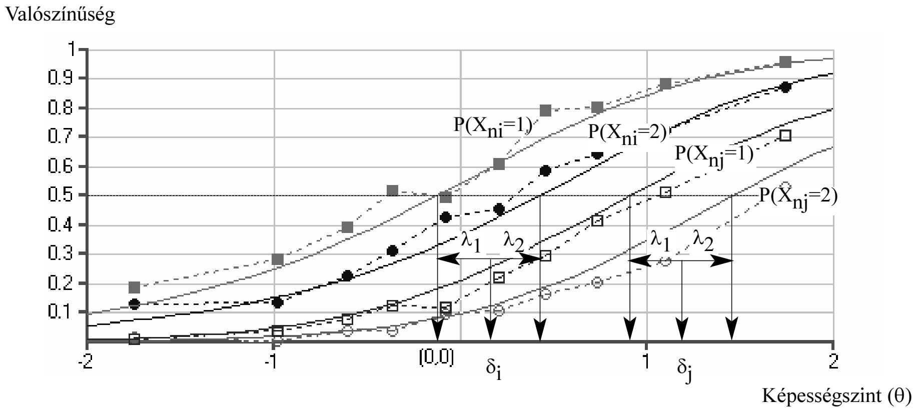
```
    személy        +item
================================
   3            |
                |
                |
                |
                |
                |7.2
               X|
              XX|
   2           X|
              XX|
              XX|5.2
             XXX|9.2
            XXXX|1.2
             XXX|
             XXX|
   1      XXXXXX|6.2 7.1
           XXXXX|
           XXXXX|3.2
        XXXXXXXX|
        XXXXXXXX|1.1 9.1
        XXXXXXXX|
       XXXXXXXXX|5.1
        XXXXXXXX|
   0      XXXXXX|
        XXXXXXXX|3.1
         XXXXXXX|4.2 6.1
       XXXXXXXXX|
      XXXXXXXXXX|
         XXXXXXX|10.2
          XXXXXX|
  -1        XXXX|4.1
            XXXX|8.2
            XXXX|
              XX|
              XX|2.2
              XX|
              XX|
               X|8.1 10.1
  -2           X|
               X|
               X|
                |
                |2.1
                |
                |
  -3            |
================================
```

7. ábra. A thurstoni küszöb személy-item térképen való megjelenítése ugyanazon adatok dichotóm kezelésének fényében (mindkét ábrán minden egyes 'x' 13 tanulót reprezentál)

Ennek következtében a parciális kredit modell $_k$paramétere két komponensre, más tulajdonságokkal jellemezhető paraméterekre bontható szét (*Write és Masters*, 1982), amelyek bizonyos szempontból hasonlóak a parciális kredit modell alternatív paraméterezési lehetőségénél említett $\delta_.$ és τ_k értékekhez. Az azonos skálaszerkezetet és a skálákon belüli azonos lépésnehézséget figyelembe véve a következőképpen lehet parametrizálni a modellt:

$$\delta_{ik} = \delta_i + \lambda_k, \text{ ahol } \delta i = \sum_{k=1}^{mi} \delta_k / m$$

azaz a δ_k paraméterértékek átlaga (ez jelentésében megegyezik a korábbi $\delta.$ paraméterrel), a λ_k küszöbérték pedig minden egyes item k-adik lépésének nehézsége az átlagos nehézség viszonylatában. Az itemeket átfogó azonos lépésnehézség miatt minden egyes item esetén azonos a λ_1, a λ_2 … λ_k; ez a parciális kredit modell τ_k paraméterértékeire nem igaz. Ha az átlagtól való eltérés irányát is figyelembe vesszük, és előjelesen kezeljük a paraméterek értékét, akkor egy item esetében a λ_k paraméterek átlaga 0, illetve $\lambda_1 = -\lambda_2$. A λ_k paraméter jelentését grafikusan a 8. ábra szemlélteti.



8. ábra. Két rangskálás item kumulatív valószínűségi görbéje (jelen esetben i=5 és j=6, Write és Masters, 1982 alapján)

Az új parametrizációt behelyettesítve a parciális kredit modell egyenletébe leegyszerűsödik modellünk a rangskálás modellre:

$$P(X_{ni}=x)=\frac{\exp\sum_{j=0}^{x}(\theta_n-(\delta_i+\lambda_j))}{\sum_{h=0}^{m}\exp\sum_{j=0}^{h}(\theta_n-(\delta_i+\lambda_j))} \qquad x=0,1,\ldots,m \qquad (9)$$

ahol $\lambda_0 \equiv 0$ úgy, hogy $\sum_{j=0}^{0}(\theta_n-(\delta_i+\lambda_j))=1$.

A modellt a parciális kredit modell megalkotása óta ritkán használják, éppen fent említett korlátai miatt. Ha empirikusan össze szeretnénk hasonlítani a két modellt, akkor vegyünk egy adatbázist, aminek minden egyes itemének azonos a skálaszerkezete (például az eddig is elemzett n=2000, itemek száma=10, itemkategóriák száma=3 szimulált adatbázist), és elemezzük mindkét modellel. A következő eredményt kapjuk: a rangskálás modellben a közelített paraméterek száma 12, míg a parciális kredit modellben 21. Az iterációk száma mindkét modellel történt elemzés során 27, viszont a devianciában χ^2-próbával (df=9) ellenőrizve szignifikáns a különbség, a parciális kredit modell illeszkedésvizsgálata szignifikánsan jobb, mint a rangskálás modellé (az illeszkedésvizsgálatokról lásd *Wu*, 2006b).

Összességében az (1) egyenlet alapján három különböző valószínűségi modellt definiálhatunk aszerint, hogy hogyan definiáljuk a δ_{ix}-t:

1) ha $\delta_{ix} = \delta_i$, akkor a dichotóm esethez, azaz a Rasch-modell egyenletéhez jutunk,

2) ha $\delta_{ix} = \delta_{ix}$, akkor a parciális kredit modell egyenletét kapjuk,

3) ha $\delta_{ix} = \delta_i + \lambda_x$, akkor a rangskálás modellt írja le az egyenlet.

A δ_{ix} további parametrizálásával további valószínűségi modellekhez juthatunk (ezekről lásd *Write és Masters*, 1982). *(1)*

Jegyzet

(1) A tanulmány a T 046659PSP OTKA kutatási program, az Oktatáselméleti Kutatócsoport és az SZTE MTA Képességkutató Csoport keretében készült. A tanulmány írása idején a szerző Bolyai János Kutatási Ösztöndíjban részesült.

Irodalom

Bond, T. – Fox, C. M. (2001): *Applying The Rasch Model. Fundamental Measurement in the Human Sciences*. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey.

Griffin, P. (1999): *Item Response Modelling: An introduction to the Rasch Model*. Assessment Research Centre Faculty of Education, The University of Melbourne.

Horváth György (1997): *A modern tesztmodellek alkalmazása.* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Molnár Gyöngyvér (2003): Az ismeretek alkalmazásának vizsgálata modern tesztelméleti eszközökkel. *Magyar Pedagógia,* 4. 423–446.

Molnár Gyöngyvér (2004): Hátrányos helyzetű diákok problémamegoldó gondolkodásának fejlettsége. *Magyar Pedagógia,* 3. 319–338.

Molnár Gyöngyvér (2005): Az objektív mérés megvalósításának lehetősége: a Rasch-modell. *Iskolakultúra,* 3. 71–80.

Molnár Gyöngyvér (megjelenés alatt): A Rasch modell alkalmazása a társadalomtudományi kutatásokban. *Iskolakultúra,* megjelenés alatt.

Molnár Gyöngyvér és Józsa Krisztián (megjelenés alatt): Az olvasási képesség értékelésének tesztelméleti megközelítései. In Józsa Krisztián (szerk.): *Az olvasási képesség fejlődése és fejlesztése.* Dinasztia Tankönyvkiadó, Budapest.

Rasch, G. (1960): *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Danish Institute for Educational Research, Copenhagen.

Write, B. D. – Masters, G. N. (1982): *Rating Scale Analysis*. MESA press, Chicago.

Write, B. D. – Stone, M. H. (1979): *Best Test Design.* MESA press, Chicago.

Wu, M. (2006a): *PISA Training Workshop: Application of Item Response Theory (IRT) to PISA (ConQuest)*. Hong Kong PISA Centre, Hong Kong.

Wu, M. (2006b): *How Well Do the Data Fit the Model?* Kézirat.

Wu, M. – Adams, R. J. – Wilson, M. R. (1998): *ACER ConQuest. Generalised Item Response Modelling Software.* ACER Press, Australia.

Masters, G.N. (1982): A Rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika*, 149–174.

Andricht, D. A. (1978): A rating formulation for ordered response categories. *Psychometrika*, 561–573.

A Gondolat Kiadó könyveiből